1930 XXIV

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Physikalisch-mathematische Klasse

BERLIN 1930

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

(Preis dieses Heftes *RM* 1.—)

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang der aufzunehmenden Mitteilungen soll in der Regel in den »Sitzungsberichten« 64 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der »Sitzungsberichte«, in den »Abhandlungen« 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der »Abhandlungen« nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 100 Goldmark, so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten ohne weiteres 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar zum gleichen Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 50, und auf ihre eigenen Kosten weitere 150 Exemplare (im ganzen also 250) abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1930

XXIV. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 31. Juli.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

1. Hr. Johnsen sprach über seine noch unveröffentlichten Versuche mit Kristallen von kubischem Kaliumchlorid. (Ersch. später.)

Es wird ein neues Verfahren zur Entscheidung zwischen den Symmetrieklassen O und O^h erdacht und mit Erfolg auf Kristalle von kubischem KCl angewendet; es entscheidet hier zugunsten der Klasse O, also im gleichen Sinne wie die bisherige Ätzmethode.

Ferner werden Verfahren aufgezeigt, mit denen man außer den bekannten Rechtskristallen von KCl vielleicht auch die noch unbekannten Linkskristalle darzustellen vermag; die Anwendung dieser Verfahren ist noch im Gang.

2. Vorgelegt wurde: »Beiträge zur Flora von Mikronesien und Polynesien IV«, zusammengestellt von L. Diels (mit Unterstützung der Wentzel-Heckmann-Stiftung) (Leipzig 1930).

Über die kräftefreie Bewegung in der relativistischen Quantenmechanik.

Von E. Schrödinger.

(Vorgelegt am 17. Juli 1930 [s. oben S. 400].)

1. Den Inhalt dieser Mitteilung bilden einige Ergebnisse aus der Anwendung des Operatorkalküls auf dasjenige physikalische System, das durch die Diracsche Wellengleichung

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi}{\partial t} + H\psi = 0 \tag{1}$$

mit

$$H = c\alpha_1 p_1 + c\alpha_2 p_2 + c\alpha_3 p_3 + \alpha_4 mc^2 \tag{2}$$

beschrieben werden soll — man nennt es gewöhnlich das Diracsche Elektron. Wir beschränken uns auf den feldfreien Fall, weil wir uns gerade dafür interessieren, daß das Diracsche System sich auch beim Fehlen äußerer Kräfte verhältnismäßig kompliziert benimmt. — Den Hamiltonschen Operator (2) stellt man nach Breit[1] am besten in korrespondenzmäßige Parallele mit dem folgenden Ausdruck für die Lorentzsche Elektronenenergie:

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \mathfrak{v}_x \cdot \frac{m\mathfrak{v}_x}{\sqrt{1-\beta^2}} + \mathfrak{v}_y \cdot \frac{m\mathfrak{v}_y}{\sqrt{1-\beta^2}} + \mathfrak{v}_z \cdot \frac{m\mathfrak{v}_z}{\sqrt{1-\beta^2}} + \sqrt{1-\beta^2}\cdot mc^2 .$$

Es entsprechen in gewissem Sinne

$c\alpha_1, c\alpha_2, c\alpha_3$ · · · den Geschwindigkeitskomponenten $\mathfrak{v}_x, \mathfrak{v}_y, \mathfrak{v}_z$,
α_4 · · · · · · · · · · · der $\sqrt{1-\beta^2}$ [2],
p_1, p_2, p_3 · · · · · den Impulskomponenten $m\mathfrak{v}_x/\sqrt{1-\beta^2}$ usw.
m, c, h sind die wohlbekannten Naturkonstanten.

Das Besondere des Ansatzes (2) liegt darin, daß man sich, mit Dirac, den trivialen Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Impuls aufgehoben denkt. Es gilt keineswegs etwa

$$\alpha_1 = \frac{\alpha_4 p_1}{m}.$$

(Formel im Druck durchgestrichen.)

Vielmehr hat sich der Geschwindigkeitsbegriff vom Impulsbegriff emanzipiert, verselbständigt. — In der Wellengleichung (1) hat man unter p_1, p_2, p_3 die

[1] G. Breit, Proc. Americ. Acad. **14**, 553, 1928.

[2] An dieser Auffassung Breits möchte ich trotz V. Fock, Zeitschr. f. Phys. **55**, 127, 1929, Anm. a. S. 129, festhalten. Besonders wegen der Rolle, die α_4 bei der Lorentz-Transformation spielt (J. v. Neumann, ZS. f. Phys. **48**, 868, 1928).

Operatoren $\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_1}$, $\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_2}$, $\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_3}$ zu verstehen, unter $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ jedoch Operatoren, welche, wie man es meistens ausdrückt, ausschießlich auf eine fünfte Variable ζ einwirken, von der ψ — außer von x_1, x_2, x_3, t — außerdem noch abhängt. Diese »fünfte Dimension« hat aber nur vier diskrete Werte, d. h. sie ist ein Index, jeder ψ-Wert existiert noch mit vier verschiedenen Indizes (die aber nicht den vier Weltkoordinaten zugeordnet werden können!). Die α_k sind in der Wellengleichung (1) als vier × vierreihige hermitesche Matrizen zu denken mit festen, ein für allemal fixierten Zahlen, wie 1, —1, $\sqrt{-1}$ u. dgl. als Matrixelementen. Es bedeutet also das Ausüben von beispielsweise α_2 auf ψ folgendes: $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ werden ersetzt durch gewisse Linearaggregate von $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ (die Argumente x_1, x_2, x_3, t bleiben dieselben). Die Matrizen α_i sind so gewählt, daß jede von ihnen, quadriert, die Einheitsmatrix ergibt, während sie untereinander »schiefvertauschbar« sind:

$$\alpha_i\alpha_k + \alpha_k\alpha_i = 2\delta_{ik}\cdot 1 . \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4) \qquad (3)$$

Auf diese fundamentale und folgenreiche Forderung wurde man geführt durch den Wunsch, daß Gleichung (1) durch »Quadrieren« auf die skalare relativistische Wellengleichung[1] für jedes ψ_i führen soll.

Die Mannigfaltigkeit der Lösungen von Gleichung (1) ist so außerordentlich groß, daß die Methode der Wellenmechanik, welche darin besteht, spezielle, repräsentative Lösungen in ihrem Verhalten zu untersuchen, hier denkbarst ungeeignet ist, um Resultate von allgemeinem Interesse zu gewinnen. Dazu eignet sich hervorragend die q-Zahlmethode oder der Operatorkalkül. Ich habe neulich auf den methodischen Gegensatz hingewiesen[2]. Der Kunstgriff des Operatorkalküls besteht darin, daß man das zeitliche Variieren von der ψ-Funktion auf die Operatoren überwälzt. Man rechnet also gewissermaßen nur mit einer einzigen ψ-Funktion, etwa, um die Ideen zu fixieren, mit derjenigen, die für $t = 0$ gilt. Für diesen selben Zeitpunkt mag — um die Ideen zu fixieren — die oben verabredete Zuordnung von Operatoren zu den Zeichen α_k, p_k usw. gelten. Und nun fragt man: wie muß ich die Operatoren zeitlich variieren lassen, damit sie, mit der zeitlich unveränderlichen ψ-Funktion verknüpft, dieselben physikalischen Aussagen liefern, zu denen ich komme, wenn ich die Operatorenzuordnung festhalte und ψ nach Gleichung (1) variieren lasse? Hocherfreulicherweise zeigt sich nun, daß die Antwort auf diese Frage von der Anfangsverteilung der ψ-Funktion ganz unabhängig ist, diese bleibt (von der Normierungsbedingung $\int \psi^*\psi\, dx = 1$ abgesehen) völlig willkürlich. Und darüber hinaus ist die Antwort auch noch gleichlautend für jeden beliebigen Operator A, sie lautet bekanntlich

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{dA}{dt} = HA - AH. \qquad (4)$$

[1] Vgl. des Verfassers »Abhandlungen zur Wellenmechanik«, 2. Aufl. S. 1, 12, 162, 178.
[2] Diese Berichte S. 300f.

Ich kann mich nicht enthalten, den kurzen Beweis dafür hierherzusetzen, so bekannt er den engsten Arbeitsgenossen heute auch sein mag. Zur Abkürzung sei stets

$$\varkappa = \frac{h}{2\pi i}.$$

Die allgemeine Lösung von Gleichung (1) ist

$$\psi(x_1, x_2, x_3, \zeta, t) = e^{-\frac{Ht}{\varkappa}} \psi(x_1, x_2, x_3, \zeta, 0). \tag{5}$$

Hier ist H Operator (selbstverständlich zeitunabhängig, wir denken ja in Gleichung (5) »wellenmechanisch«); t ist die gewöhnliche Zeit, kein Operator; der Operator $e^{\frac{Ht}{\varkappa}}$ ist also unmißverständlich. Die Lösung ist bei gegebenem $\psi(x_1, x_2, x_3, \zeta, 0)$ offenbar eindeutig.

Auch die Operatorgleichung (4) hat eine eindeutige allgemeine Lösung. Zunächst verlangt sie im Spezialfall $A \equiv H$, daß H konstant ist (auch im Sinne des Operatorenkalküls; da steht das ja nicht von vornherein fest; aber Gleichung (4) verlangt es). Dies gegeben, wird die Operatorgleichung (4) für ein beliebiges A allgemein gelöst durch

$$A(t) = e^{\frac{Ht}{\varkappa}} A(0) e^{-\frac{Ht}{\varkappa}}, \tag{6}$$

und die Lösung ist offenbar eindeutig.

Und nun ist zu zeigen, daß $A(t)$ mit $\psi(0)$ in der bekannten Weise zur Bildung des Erwartungswertes $\bar{A}$ verknüpft, dasselbe liefert, wie $A(0)$ mit $\psi(t)$ verknüpft. Das ist alles, was verlangt wird. Es ist also zu zeigen, daß

$$\int \psi^*(0) \cdot A(t) \psi(0)\, dx = \int \psi^*(t) \cdot A(0) \psi(t)\, dx,$$

d. h. nach (5) und (6):

$$\int \psi^*(0) \cdot e^{\frac{Ht}{\varkappa}} A(0) e^{-\frac{Ht}{\varkappa}} \psi(0)\, dx = \int e^{\frac{H^*t}{\varkappa}} \psi^*(0) \cdot A(0) e^{-\frac{Ht}{\varkappa}} \psi(0)\, dx.$$

Daß dies richtig ist, erkennt man, indem man rechts den Operator $e^{\frac{H^*t}{\varkappa}}$ vom ersten auf den zweiten Faktor überwälzt, wobei nur »Zeilen und Kolonnen zu vertauschen« sind, d. h. aus H^* wird H, wenn H hermitesch ist. —

Der Beweis erfordert nur die soeben verwendete Hermitizität von H, sowie, daß H die Zeit nicht explizite enthalte (sonst würde (5) nicht die Lösung von (1) sein). Im übrigen kann H sein, was es will.

Wir benutzen die Lösung (6) bloß noch, um rasch und ohne Rechnung einzusehen, daß Vertauschungsrelationen mit konstanter rechter Seite (wie z. B. die Beziehungen (3)) zu allen Zeiten erhalten bleiben, auch vom Operatorenstandpunkt. Denn nach (6) bleibt ein Operator, der zur Zeit Null (oder allgemeiner: zu irgendeiner Zeit) gleich 0 oder gleich 1 (oder allgemeiner: mit H vertauschbar) war, offenbar dauernd konstant. — Im übrigen arbeiten wir jetzt ausschließlich mit der Grundgleichung (4), wozu bloß die Erklärung von H durch

(2), die Vertauschungsrelationen (3) sowie endlich die wohlbekannten Vertauschungsrelationen der p_k mit den Operatoren x_k kommen:

$$p_k x_i - x_i p_k = \varkappa \delta_{ik} \cdot 1 . \tag{7}$$

2. Bildet man nach (3) die zeitliche Ableitung einer Koordinate[1], z. B. von x_k, so erhält man nach (2), (3) und (7) wirklich

$$\frac{dx_k}{dt} = c\alpha_k . \qquad (k = 1, 2, 3) \tag{8}$$

Darüber hat man sich gewundert, weil nämlich

$$\left(\frac{dx_k}{dt}\right)^2 = c^2 \alpha_k^2 = c^2 \cdot 1 .$$

(Vgl. BREIT l. c. und FOCK l. c.). Das Quadrat jeder Geschwindigkeitskomponente ist also nur des Meßwertes c^2 fähig, der dann zugleich auch der Mittelwert (Erwartungswert) bei vielen Messungen an demselben Wellenpaket sein muß. Die Geschwindigkeitskomponente selbst gestattet nur die Meßwerte $\pm c$. Ihr Erwartungswert kann und wird im allgemeinen kleiner sein. Immerhin wird man auch dafür im allgemeinen die Größenordnung c erwarten und wundert sich, wie der Schwerpunkt der Ladungswolke es anstellen mag, sich immer so schnell zu bewegen und doch unter Umständen mit nur mäßiger Geschwindigkeit fortzuschreiten.

Nun offenbar, indem er sich nicht geradlinig bewegt. In der Tat sind die α_k nach (4) nicht konstant, weil sie mit H nicht vertauschbar sind. Man berechnet nach (2) und (3)[2]

$$H\alpha_k + \alpha_k H = 2cp_k , \qquad (k = 1, 2, 3) \tag{9}$$

folglich nach (4)

$$\varkappa \frac{d\alpha_k}{dt} = H\alpha_k - \alpha_k H = 2(cp_k - \alpha_k H) = 2(H\alpha_k - cp_k) . \qquad (k = 1, 2, 3) \tag{10}$$

Da die Impulskomponenten p_k mit H vertauschbar, also zeitlich konstant sind, enthält diese Gleichung nur die Variable α_k und läßt sich integrieren. Man führe für α_k die Variable η_k ein:

$$\eta_k = \alpha_k - cH^{-1} p_k . \qquad (k = 1, 2, 3) \tag{11}$$

Dann kommt

$$\varkappa \frac{d\eta_k}{dt} = -2\eta_k H = 2H\eta_k . \tag{12}$$

Integriert:

$$\eta_k = \eta_k^0 e^{-\frac{2Ht}{\varkappa}} = e^{\frac{2Ht}{\varkappa}} \eta_k^0 . \tag{13}$$

[1] Von nun an bedeuten Ausdrücke wie »Koordinate«, »Impuls«, »Energie« usw. stets die betreffenden Operatoren. Bloß t und die Naturkonstanten sind gewöhnliche Zahlen.

[2] Mit den x_i und p_i sind die α^k vertauschbar, weil sie ja auf ganz andere Variable wirken.

η_k^0 ist der »Wert« von η_k (d. h. die Gestalt des Operators η_k) für $t = 0$. η_k und ebenso natürlich η_k^0 ist nach (12) mit H schiefvertauschbar[1]. Alle mit H schiefvertauschbaren Operatoren hängen in der Art (13) vom Zeitparameter ab (folgt unmittelbar aus (6)) und haben konstantes Quadrat. Führt man in (13) nach (11) wieder α_k ein und substituiert den für α_k gefundenen Wert in (8), so ergibt sich

$$\frac{dx_k}{dt} = c^2 H^{-1} p_k + c \eta_k^0 e^{-\frac{2Ht}{\varkappa}}. \tag{14}$$

Integriert:

$$x_k = a_k + c^2 H^{-1} p_k t - \frac{c\varkappa}{2} \eta_k^0 H^{-1} e^{-\frac{2Ht}{\varkappa}}. \tag{15}$$

a_k ist die Integrationskonstante (Operator!), für welche nur deshalb nicht x_k^0 geschrieben wurde, weil es nicht genau der Wert von x_k für $t = 0$ ist.

Die Koordinate x_k besteht nach (15) aus zwei Summanden, für die wir besondere Zeichen einführen:

$$\left.\begin{aligned} x_k &= \tilde{x}_k + \xi_k \\ \tilde{x}_k &= a_k + c^2 H^{-1} p_k t \\ \xi_k &= -\frac{c\varkappa}{2} \eta_k^0 H^{-1} e^{-\frac{2Ht}{\varkappa}} = -\frac{c\varkappa}{2} \eta_k H^{-1} = \frac{c\varkappa}{2} H^{-1} \eta_k . \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Der erste Summand $\tilde{x}_k$ wächst linear mit der Zeit an, und zwar mit derjenigen Geschwindigkeit, die dem Impuls p_k entspricht, mit den α_k nichts zu tun hat und keineswegs von der Größenordnung c zu sein braucht. In der Tat, wenn etwa die ψ-Funktion, das »Wellenpaket«, nur aus Energieimpuls-Eigenfunktionen eines schmalen Bereichs, d. h. aus ebenen Wellen eines schmalen Wellenlängen- und engen Wellennormalenbereiches superponiert ist, so kommt der Operator $c^2 H^{-1} p_k$ auf folgendes hinaus: Multiplizieren mit

$$c^2 \cdot \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{mc^2} \cdot \frac{m \mathfrak{v}_k}{\sqrt{1-\beta^2}} = \mathfrak{v}_k ,$$

wobei $\mathfrak{v}_k$ und β in der gewöhnlichen, durch das Experiment bestätigten Weise mit der de Broglie-Wellenlänge zusammenhängen (nicht mit den α_k, wie in der korrespondenzmäßigen Parallele, von der ganz im Anfang die Rede war).

Hierzu tritt aber noch ein zweiter Summand, ξ_k, der offenbar periodischen Charakter hat ($\varkappa = \frac{h}{2\pi i}$ ist rein imaginär), und zwar im allgemeinen recht komplizierten »fastperiodischen« Charakter. $c\alpha_k$ ist die Geschwindigkeit dieser hochfrequenten, schnellen Zitterbewegung kleiner Amplitude (vgl. das Folgende), welche

[1] Man stoße sich nicht an dem Umstand, daß η_k^0 als »Anfangswert« von η_k per definitionem konstant und doch mit H nicht vertauschbar ist. So ist ja auch in der gewöhnlichen Mechanik der Anfangswert x_0 von x ein Konstante, woraus aber keineswegs folgt, daß $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0$ verschwindet.

sich der geradlinig gleichförmigen Bewegung überlagert. Man kann auch sagen, $c\alpha_k$ ist die Momentangeschwindigkeit des Schwerpunktes der Ladungswolke. In der Tat, für sehr kurze Zeiten ist x_k durch eine ganz andere Linearfunktion gegeben. Entwickelt man die e-Funktion in (15) und vereinigt das lineare Glied mit dem, das schon dort steht, so erhält man $c\alpha_k^0 t$ — selbstverständlich, sonst wäre ja (15) nicht die richtige Auflösung von (8). Also: $c^2 H^{-1} p_k$ ist sozusagen die makroskopische, $c\alpha_k$ dagegen die mikroskopische Geschwindigkeit des Elektrons, oder anschaulicher ausgedrückt: die Erwartungswerte dieser Operatoren geben die makroskopische bzw. mikroskopische Geschwindigkeit des Schwerpunktes der Ladungswolke.

Die Amplitude der Zitterbewegung bietet erhebliches Interesse. Sie läßt sich nach (16)

$$\xi_k = \frac{c\varkappa}{2} H^{-1} \eta_k \tag{16'}$$

ohne weiteres abschätzen. η_k ist ebenso wie α_k »von der Größenordnung 1«, H für langsame Elektronenbewegung von der Größenordnung mc^2; $\varkappa = \frac{h}{2\pi i}$. Der Erwartungswert von ξ^k ist also von der Größenordnung

$$\xi_k \sim \frac{h}{4\pi m c} \sim 10^{-11}\, cm. \tag{17}$$

Es ist das die bekannte kritische Längendimension (Comptonwellenlänge), auf welche man nach der Unbestimmtheitsrelation ein Wellenpaket nicht reduzieren kann, ohne eine Impulsschwankung von der ungeheuren Größe mc mit in Kauf zu nehmen. Für ein Elektron von einigermaßen bestimmter makroskopischer Geschwindigkeit sind also die Abweichungen des Schwerpunktes von der geradlinigen Bahn viel kleiner als die Ausdehnung der Ladungswolke. Eine noch feinere Abschätzung ergibt sich durch Quadrieren von (16'), da ξ_k ebenso wie η_k mit H schiefvertauschbar ist, mithin ein konstantes Quadrat hat:

$$\xi_k^2 = -\frac{c^2\varkappa^2}{4} H^{-2} \eta_k^2 .$$

Nach (11) ist

$$H\eta_k = H\alpha_k - c p_k ; \quad \eta_k H = \alpha_k H - c p_k$$

$$H^2 \eta_k^2 = H^2 - c p_k (H\alpha_k + \alpha_k H) + c^2 p_k^2 .$$

Also nach (9)

$$H^2 \eta_k^2 = H^2 - c^2 p_k^2 .$$

Mithin

$$\xi_k^2 = \frac{h^2 c^2}{16\pi^2} H^{-2} (1 - H^{-2} c^2 p_k^2) . \tag{18}$$

Auf ein Wellengebilde von einigermaßen einheitlichem Energieimpuls angewendet, ergibt sich durch ähnliche Überlegungen wie oben

$$\overline{\xi_k^2} = \frac{h^2}{16\pi^2 m^2 c^2} (1 - \beta_k^2)(1 - \beta^2) , \tag{19}$$

wobei β und β_k die Gesamtgeschwindigkeit und ihre k-Komponente sind, wie sie der Energie und dem Impuls entsprechen, nichts mit dem α_k zu tun haben. Mit Annäherung an die Lichtgeschwindigkeit nimmt also die Amplitude der Zitterbewegung augenscheinlich ab.

Man muß übrigens vor dem folgenden naheliegenden Irrtum warnen. Wohl ist nach (16)

$$\overline{\xi_k} = \overline{x_k} - \overline{\tilde{x}_k}$$

oder noch deutlicher geschrieben

$$\overline{\xi_k} = \overline{x_k - \tilde{x}_k};$$

d. h. wohl ist $\overline{\xi_k}$ der mittlere Abstand der Ladungswolke von einer zur k-Richtung senkrechten Ebene durch den Punkt, der die Erwartungswerte $\overline{\tilde{x}_k}$ zu Koordinaten (c-Zahlen!) hat und sich geradlinig gleichförmig bewegt. Aber keineswegs ist etwa $\overline{\xi_k^2}$ das mittlere Quadrat dieses Abstandes für die Punkte der Ladungswolke. Sonst würde man ja aus (18) herauslesen, daß die Diracschen Gleichungen nur Ladungswolken von der Lineardimension $\frac{h}{4\pi mc}$ zulassen, nicht größer und nicht kleiner — und das wäre offenbarer Unsinn. — Vielmehr hat man sich die Sache so zu denken: Die wahre, durch die Operatoren x_k zu beschreibende Lagenstatistik (= Ladungswolke) wird auf dem Umweg über die Lagenstatistik eines fingierten Punktes $\tilde{x}_k$ beschrieben, welche davon nur wenig abweicht und insofern ein wenig einfacher ist, als sie im Mittel einer geradlinig gleichförmigen Bewegung entspricht und keine auf die Indexkoordinate ζ wirkenden Operatoren enthält. ξ_k beschreibt dann die Statistik der wahren Lage mit Bezug auf die fingierte. Jeder Punkt der fingierten Ladungswolke wird gewissermaßen noch einmal in eine kleine Ladungswolke zerstäubt, und zwar jeder in gleicher Weise. Diese kleine Ladungswolke ist es, die Lineardimensionen von der Ordnung $\frac{h}{4\pi mc}$, nicht größer und nicht kleiner, und konstante (= zeitunabhängige) quadratische Momente mit Bezug auf denn fingierten Punkt hat[1].

3. Man wird geneigt sein, die durch ξ_k beschriebene Lagenstatistik als das eigentliche Modell der inneren Struktur des Elektrons »nach Ablösung der Translation« aufzufassen. Und man wird versuchen, das Spinphänomen mit ihr in Zusammenhang zu bringen. Zum Begriff des Spins gelangt man durch die Bemerkung, daß der Operator Impulsmoment auch bei der kräftefreien Bewegung nicht konstant ist, vielmehr ist konstant die Vektorsumme aus ihm und einem anderen Operator[2]. Wir werden uns von nun an der

[1] Nicht nur ξ_k^2, auch $\xi_k \xi_l$ für $k \neq l$ ist konstant. Das folgt aus ihrer Schiefvertauschbarkeit mit H:

$$\varkappa \frac{d}{dt}(\xi_k \xi_l) = H\xi_k \xi_l - \xi_k \xi_l H = -\xi_k H \xi_l - \xi_k \xi_l H = -\xi_k (H\xi_l + \xi_l H) = 0 .$$

[2] Daß man auch ohne äußeres Feld zwischen Bahnmoment und Spinmoment zu unterscheiden hat, darauf haben kürzlich E. Fues und H. Hellmann in einer interessanten Arbeit hingewiesen (Phys. ZS. **31**, 465, 1930), mit welcher die vorliegende, bei gänzlich verschiedener Methodik, viele innere Berührungspunkte hat.

dreidimensionalen Vektorsymbolik bedienen. Die Zeichen p, α, x, $\tilde{x}$, ξ, η usw. ohne Index sollen Dreiervektoren mit den Komponenten p_1, p_2, p_3; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ usw., ferner soll $(\alpha p) = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3$ das innere Produkt, $[\alpha p]$ mit den Komponenten $\alpha_2 p_3 - \alpha_3 p_2$ usw. das Vektorprodukt bedeuten, wobei zu erinnern ist, daß das Vektorprodukt eines Vektors mit sich selbst im allgemeinen nicht verschwindet und daß besonders auch beim Differenzieren auf die Reihenfolge der Faktoren zu achten ist, beispielsweise

$$\frac{d}{dt}[\alpha, \alpha] = \left[\frac{d\alpha}{dt}, \alpha\right] + \left[\alpha, \frac{d\alpha}{dt}\right]. \tag{20}$$

Wir schreiben die Gleichungen (10) vektoriell so an

$$\frac{\varkappa}{2}\frac{d\alpha}{dt} = H\alpha - cp$$

$$\frac{\varkappa}{2}\frac{d\alpha}{dt} = cp - \alpha H, \tag{10'}$$

multiplizieren die erste von rechts, die zweite von links vektoriell mit α und addieren. Da die α mit den p vertauschbar sind, ändert in ihrem Vektorprodukt die Reihenfolge nur das Vorzeichen. Wegen der allgemeinen Gleichung (4) kommt:

$$\frac{\varkappa}{2}\frac{d}{dt}[\alpha, \alpha] = \varkappa\frac{d}{dt}[\alpha, \alpha] + 2c[\alpha, p]$$

oder

$$\frac{\varkappa}{4}\frac{d}{dt}[\alpha, \alpha] = -c[\alpha, p] = -\frac{d}{dt}[x, p]. \tag{21}$$

Die letzte Gleichung folgt aus (8) und aus der Konstanz von p. Also ist

$$[x, p] + \frac{\varkappa}{4}[\alpha, \alpha] = \text{Const.} \tag{22}$$

$[x, p]$ ist — unter Übernahme der klassischen Definition — das Impulsmoment (»Bahnimpuls«). Wir werden sogleich sehen, daß er auch bei der kräftefreien Bewegung, die wir hier betrachten, für sich allein wirklich nicht konstant ist, sondern nur die obige Summe ist konstant. Dies allein schon (ohne Bezugnahme auf Zusatzglieder in H, die erst im Feld auftreten) rechtfertigt es, als ein »Extra«impulsmoment (»Spinmoment«) zu bezeichnen den Vektor, dessen 3. Komponente z. B. lautet

$$\frac{h}{8\pi i}(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_2\alpha_1) = \frac{h}{4\pi i}\alpha_1\alpha_2 = \frac{h}{4\pi}s_3.$$

Wir führen also den neuen Vektor s ein durch

$$\alpha_1\alpha_2 = is_3 \text{ usw. oder } [\alpha, \alpha] = 2is. \tag{23}$$

(Seine Komponenten sind hermitesch, da die von $[\alpha, \alpha]$, als Kommulatoren, schiefhermitesch sind.) Folgende Beziehungen sind leicht zu verifizieren:

$$[s, s] = -2is \qquad [\alpha, s] = +[s, \alpha] = 2i\alpha. \tag{24}$$

$$s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = 1.$$

Die s_k haben also, wie die α_k, nur die Eigenwerte ± 1. Nun lautet also Gleichung (21):

$$\frac{h}{4\pi}\frac{ds}{dt} = -c[\alpha, p]. \qquad (22')$$

Die Komponenten von $[\alpha, p]$ gehören zu den mit H schiefvertauschbaren Größen; in der Tat:

$$H[\alpha, p] + [\alpha, p]H = [H\alpha + \alpha H, p] = 2c[p, p] = 0.$$

(Es ist (9) verwendet sowie die Tatsache, daß die p_k untereinander und mit H kommutieren). Folglich hängen sie von der Zeit in der Art (13) ab:

$$[\alpha, p] = [\alpha.p]_0 e^{-\frac{2Ht}{\kappa}} = e^{\frac{2Ht}{\kappa}}[\alpha, p]_0. \qquad (25)$$

Dies in (22') eingesetzt und integriert, gibt

$$\frac{h}{4\pi}s = \frac{h}{4\pi}\tilde{s} + \frac{c\varkappa}{2}[\alpha, p]_0 H^{-1} e^{-\frac{2Ht}{\kappa}}. \qquad (26)$$

$\tilde{s}$ ist eine Integrationskonstante (Operator und Vektor), die mit den »Anfangswerten« von s, α, p in leicht angebbarer Weise zusammenhängt[1]. Damit ist der variable Teil des Spinmomentes explizite in Evidenz gesetzt. Wenn die makroskopische Geschwindigkeit $c^2 H^{-1} p$ klein ist gegen die Lichtgeschwindigkeit, so ist die Amplitude des variablen Teiles von s klein gegen den konstanten, und zwar von erster Ordnung in β. Man kann nämlich für (26) nach (25) auch schreiben:

$$\frac{h}{4\pi}s = \frac{h}{4\pi}\tilde{s} + \frac{h}{4\pi i}[\alpha, cH^{-1}p], \qquad (26')$$

s und α sind von der Ordnung 1 (Eigenwerte ± 1), $cH^{-1}p$ ist von der Ordnung β. — Multipliziert man (26') skalar mit p, so findet man, durch Anwendung der elementaren Vertauschungsregel der Vektoralgebra auf das Dreierprodukt,

$$(sp) = (\tilde{s}p) = \text{Const.} \qquad (27)$$

Die Komponente des Spins in der Richtung des (linearen) Impulses ist konstant. Das folgt ja auch schon aus (22'), da die Änderungsgeschwindigkeit von s »auf p senkrecht steht«. Man muß freilich bei solchen Schlüssen behutsam sein, d. h. auf Nichtvertauschbarkeit achten. Z. B. das skalare Produkt mit dem anderen Faktor: $(s\alpha)$, ist keineswegs konstant, wie man sich leicht überzeugen kann.

Um nun auf den Zusammenhang des Spins mit unserer »inneren Lagenstatistik« ξ_k zu kommen, nehmen wir (16) her:

$$\xi = \frac{c\varkappa}{2}H^{-1}\eta = \frac{ch}{4\pi i}H^{-1}\eta \qquad (16')$$

[1] Nämlich offenbar: $\tilde{s} = s_0 + ic[\alpha, p]_0 H^{-1}$.

und multiplizieren es vektoriell von rechts mit p

$$[\xi p] = \frac{ch}{4\pi i} H^{-1} [\eta p] .$$

Wegen (11)

$$\eta = \alpha - cH^{-1} p \tag{11'}$$

kommt

$$[\xi p] = \frac{ch}{4\pi i} H^{-1} [\alpha p] = -\frac{h}{4\pi i} [\alpha , cH^{-1} p] . \tag{28}$$

Das ist entgegengesetzt gleich dem variablen Teil des Spinimpulses (s. (26′)), d. h. $[\xi p]$ ist der variable Teil des Bahnimpulses, was übrigens nach (16) unmittelbar einleuchtet ($[\tilde{x} p]$ ist konstant).

Es fragt sich, ob man auch den konstanten Teil des Spinimpulses herstellen kann, indem man den »Hebelarm ξ« mit einem passend gewählten Linearimpuls kombiniert. Hierfür bietet sich dar die Impulsgröße, die zur eigentlichen (»mikroskopischen«) Geschwindigkeit $c\alpha$ gehört, aus ihr durch Multiplikation mit $\frac{H}{c^2}$ entsteht. Es ist etwas rechenbequemer, es zuerst mit $c\eta$, statt mit $c\alpha$ zu versuchen, d. i. mit der um die Makrogeschwindigkeit korrigierten Mikrogeschwindigkeit. Wir wählen also als »Mikroimpuls« etwa

$$\frac{\eta H}{c}$$

und berechnen nach (16′) und (12′)

$$\left[\xi , \frac{\eta H}{c}\right] = \frac{h}{4\pi i} [\eta , \eta] = \frac{h}{4\pi i} \{[\alpha , \alpha] - [\alpha , cH^{-1} p] - [cH^{-1} p , \alpha]\}$$
$$= \frac{h}{4\pi i} \{[\alpha , \alpha] - 2 [\alpha , cH^{-1} p]\} . \tag{29}$$

(Es kompensieren sich zwei Vorzeichenwechsel; α ist mit H »schiefvertauschbar bis auf einen Kommutator Const. $\cdot p$«; vgl. (9).) Also nach (23)

$$\left[\xi , \frac{\eta H}{c}\right] = \frac{h}{2\pi} s - \frac{h}{2\pi i} [\alpha , cH^{-1} p] = 2 \cdot \frac{h}{4\pi} \tilde{s} \tag{30}$$

(vgl. (26′). In bezug auf Hermitizität liegt die Sache so, daß ηH zwar schiefhermitisch ist, weil η und H schief vertauschen; das Vektorprodukt ist aber wieder hermitesch, weil es, wie (29) zeigt, im wesentlichen ein Kommutator ist.) — Man erhält also auf diese Weise den konstanten Teil des Spinimpulsmomentes doppelt. Dieses nicht ganz vermutete Ergebnis läßt sich, soviel ich sehe, durch kein Umstellen der Faktoren oder Verwenden von α statt η beseitigen, sondern nur indem man eben den Hebelarm ξ bloß mit der Hälfte des oben verwendeten Mikroimpulses kombiniert. Denn bei kleiner Makrogeschwindigkeit kommt eben sonst immer das $[\alpha , \alpha]$ mit dem Faktor 2. Insbesondere erscheint auch der Gesamtspin als Vektorprodukt von ξ mit einem

Impuls, der (immer gedacht: bei **kleiner** Makrogeschwindigkeit) nur etwa halb so groß ist, wie der oben eingeführte. Aus (28) und (30) findet man leicht:

$$\frac{h}{4\pi} s = \left[\xi, \frac{\eta H}{2c} - p\right],$$

welches nach (9) und (11) noch verschiedentlich umgeschrieben werden kann, ohne daß es jedoch gelingt, s durch ξ und η oder durch ξ und α allein, ohne p, auszudrücken. —

Die seltsam verwickelten Verhältnisse, die nach der Diracschen Gleichung schon beim kräftefreien Massenpunkt vorliegen, schienen mir der Darlegung wert, obwohl ich vorläufig kein irgendwie abschließendes Ergebnis dieser Untersuchung aufzeigen kann.

Ausgegeben am 17. Oktober.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

§ 17.

Eine für die akademischen Schriften bestimmte wissenschaftliche Mitteilung darf in keinem Falle vor ihrer Ausgabe an jener Stelle anderweitig, sei es auch nur auszugsweise oder auch in weiterer Ausführung, in deutscher Sprache veröffentlicht sein oder werden. Sollte eine dem zuwiderlaufende Veröffentlichung dem redigierenden Sekretar vor der Ausgabe in den akademischen Schriften zur Kenntnis kommen, so hat er die Mitteilung aus diesen zu entfernen.

Wenn der Verfasser einer aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilung dieselbe anderweitig früher zu veröffentlichen beabsichtigt, als ihm dies nach den geltenden Rechtsregeln zusteht, so bedarf er dazu der Einwilligung der Gesamtakademie.

Gedächtnisreden anderweitig zu veröffentlichen, ist den Verfassern unbeschränkt gestattet.

Aus § 21.

Die Sitzungsberichte erscheinen in einzelnen Stücken in der Regel Donnerstags acht Tage nach jeder Sitzung.

Aus § 22.

Jeden Sitzungsbericht eröffnet eine Übersicht über die in der Sitzung vorgetragenen wissenschaftlichen Mitteilungen und über die zur Veröffentlichung geeigneten geschäftlichen Angelegenheiten.

Hinter den Titeln der wissenschaftlichen Mitteilungen folgen in dieser Übersicht kurze Inhaltsangaben derselben, welche die Verfasser einreichen, und für welche sie verantwortlich sind. Diese Inhaltsangaben sollen sich in der Regel auf 5—6 Druckzeilen beschränken, keinesfalls 10 Zeilen überschreiten.

Die nicht in den Schriften der Akademie erscheinenden Mitteilungen werden mit vorgesetztem Stern bezeichnet, bei den für die Abhandlungen bestimmten wird »(Abh.)« zugefügt.

Wissenschaftliche Mitteilungen fremder Verfasser werden in dem Bericht über diejenige Sitzung aufgeführt, in welcher deren Aufnahme in die akademischen Schriften endgültig beschlossen wird.

Aus § 27.

Das Manuskript einer in einer akademischen Sitzung am Donnerstag zur Aufnahme in die Sitzungsberichte zugelassenen Mitteilung, welche am nächsten Donnerstag gedruckt erscheinen soll, muß der Regel nach in der Sitzung selber, spätestens bis Freitag 10 Uhr morgens, dem redigierenden Sekretar oder der Reichsdruckerei druckfertig zugestellt werden. Später eingereichte Manuskripte werden, mit dem Präsentationsvermerk des redigierenden Sekretars oder des Archivars versehen, für ein späteres Stück zurückgelegt.

Dasselbe kann von vornherein mit Mitteilungen geschehen, deren Satz aus irgendwelchen Gründen besondere Schwierigkeiten erwarten läßt, oder welche den in den §§ 3 und 4 enthaltenen Bestimmungen nicht entsprechen.

Die Reichsdruckerei sendet die Korrekturen an das Bureau der Akademie, das sie an die Verfasser oder an die Mitglieder, welche die Mitteilung vorgelegt haben, weiterreicht. Die Verfasser schicken die Korrekturabzüge nach Berichtigung an das Bureau der Akademie zurück und erhalten und erledigen auf dem gleichen Wege auch die etwa erforderlichen weiteren Korrekturen. Wird die Korrektur länger als bis Dienstag Abend von der damit betrauten Person behalten, so hat diese es zu verantworten, wenn die Mitteilung in einem späteren Stück erscheint.

Nach auswärts werden Korrekturen nur auf Verlangen versandt; die Verfasser verzichten damit auf Erscheinen ihrer Mitteilung nach acht Tagen. Fremden Verfassern, deren Korrekturen erst noch dem vorlegenden Mitgliede zur Revision unterbreitet werden müssen, kann das Erscheinen am nächsten Ausgabetage überhaupt nicht zugesichert werden.

Aus § 36.

Die Akademie behält sich das Recht vor, von einer vergriffenen Abhandlung eine zweite Auflage zu veranstalten.

Sitzungsberichte der Akademie

Physikalisch-mathematische Klasse

Sonderausgaben. II. Halbjahr 1929

P. Krüger: Über die Verdauungsfermente der Wirbellosen . . . . *RM* 2.—
H. Bohr: Über ganze transzendente Funktionen von einem besonderen Typus. (Beispiel einer allgemeinen Konstruktionsmethode) . . . . » 1.—
C. Wirtz: Experimentelles zur Photometrie des Rotationsellipsoids . . . . » 2.—
E. Ullrich: Über die Ableitung einer meromorphen Funktion . . . . » 2.—
Bieberbach: Über die topologischen Typen der offenen Euklidischen Raumformen . . . . . . » 1.—
Bieberbach: Über schlichte Abbildungen des Einheitskreises durch meromorphe Funktionen . . » 1.—
R. Brauer: Die stetigen Darstellungen der komplexen orthogonalen Gruppe . . . . » 1.—
M. J. Belinfante: Zur intuitionistischen Theorie der unendlichen Reihen . . . . » 2.—
Paschen: Lymans Heliumlinien . . . . » 1.—
Schrödinger: Verwaschene Eigenwertspektra . . . . » 2.—

Sonderausgaben. I. Halbjahr 1930

Guthnick: Der Einprismensternspektrograph und das lichtelektrische Sternphotometer am 125 cm-Reflektor der Sternwarte Berlin-Babelsberg . . . . *RM* 1.—
Einstein: Die Kompatibilität der Feldgleichungen in der einheitlichen Feldtheorie . . . . . . » 1.—
v. Laue: Zur Elektrostatik der Raumgitter . . . . » 1.—
A. Heyting: Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik . . . . » 1.—
A. Heyting: Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik . . . . » 1.—
G. Hoheisel: Nullstellenanzahl und Mittelwerte der Zetafunktion . . . . » 1.—
Ludendorff: Über die Entstehung der Tzolkin-Periode im Kalender der Maya . . . . » 2.—
Einstein und W. Mayer: Zwei strenge statische Lösungen der Feldgleichungen der einheitlichen Feldtheorie . . . . » 1.—
E. Rembs: Unverbiegbare offene Flächen . . . . » 1.—
Penck: Potentielle und effektive Wasserkräfte des Landes . . . . » 1.—
G. Doetsch: Sätze von Tauberschem Charakter im Gebiet der Laplace- und Stieltjes-Transformation » 1.—
A. Heyting: Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik. III . . . . » 1.—
F. Becker: Zur Struktur des lokalen Sternsystems. I. Die Spektra der Klassen A bis K in der Deklinationszone −60° . . . . » 1.—
A. Defant: Die Bewegungen und der thermo-haline Aufbau der Wassermassen in Meeresstraßen » 2.—
R. Brauer und Schur: Zum Irreduzibilitätsbegriff in der Theorie der Gruppen linearer homogener Substitutionen . . . . » 2.—
A. Defant: Bericht über die ozeanographischen Untersuchungen des Vermessungsschiffes »Meteor« in der Dänemarkstraße und in der Irmingersee . . . . » 1.—
Rubner: Konstitution und Ernährung . . . . » 2.—
Ludendorff: Über die Reduktion der Maya-Datierungen auf unsere Zeitrechnung . . . . . . » 1.—
Hesse: Vorgang und Ereignis in der Biologie . . . . » 1.—
Schrödinger: Zum Heisenbergschen Unschärfeprinzip . . . . » 1.—
Koebe: Riemannsche Mannigfaltigkeiten und nichteuklidische Raumformen. Fünfte Mitteilung: Uniformisable singularitätenbehaftete Raumformen. Verlauf geodätischer Linien. Quasihomotopie » 4.—
Planck: Über die Grenzschicht verdünnter Elektrolyte . . . . » 1.—
Haberlandt: Das Wesen der *Crataegomespili* . . . . » 2.—

Sonderausgaben. II. Halbjahr 1930

S. Bochner: Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen . . . . *RM* 1.—
Schrödinger: Über die kräftefreie Bewegung in der relativistischen Quantenmechanik . . . . » 1.—

Die Preise verstehen sich in Reichsmark

Ein systematisches Gesamtverzeichnis der noch lieferbaren Sonderdrucke kann durch den Verlag Walter de Gruyter u. Co., Berlin W 10, Genthiner Str. 38, bezogen werden